模块三 三角函数的图象性质

第 1 节 求三角函数解析式 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$（★★★）

强化训练

1.（★★）设 $f(x)=4\cos(2x-\frac{\pi}{6})\sin 2x$，则函数 $y=f(x)$ 的值域为_____.

答案：$[-1,3]$

解析：欲求值域，得把解析式化简，首先拆 $\cos(2x-\frac{\pi}{6})$ 这一项，

由题意，$f(x)=4(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x)\sin 2x=2\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x+2\sin^2 2x$，

再降次，并用辅助角公式合并，所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin 4x+1-\cos 4x=2\sin(4x-\frac{\pi}{6})+1$，

因为 $-1\le\sin(4x-\frac{\pi}{6})\le 1$，所以 $-1\le f(x)\le 3$，故 $f(x)$ 的值域为 $[-1,3]$.

2.（★★）已知函数 $f(x)=\sin^2(x+\frac{\pi}{3})+\cos^2 x(x\in\mathbf{R})$，则 $f(x)$ 的最小正周期为_____，值域为_____.

答案：π，$[1-\frac{\sqrt{3}}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2}]$

解析：先把解析式化简，两项均为平方，所以降次，

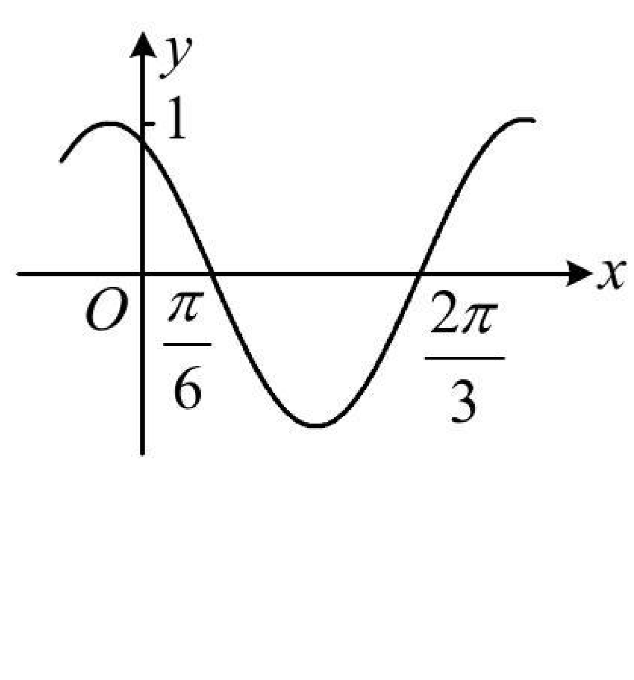
由题意，$f(x)=\frac{1-\cos(2x+\frac{2\pi}{3})}{2}+\frac{1+\cos 2x}{2}=1-\frac{1}{2}\cos(2x+\frac{2\pi}{3})+\frac{1}{2}\cos 2x$，

把 $\cos(2x+\frac{2\pi}{3})$ 拆开，就能用辅助角公式合并，

$f(x)=1-\frac{1}{2}(\cos 2x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin 2x\sin\frac{2\pi}{3})+\frac{1}{2}\cos 2x=1+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{3}{4}\cos 2x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，值域为 $[1-\frac{\sqrt{3}}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2}]$.

3.（2023·重庆模拟改·★★）如图是函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<2\pi)$ 的部分图象，则 $f(x)=$_____.



答案：$\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$

解析：图象上有 2 个零点，可由此看出周期，求得 ω，

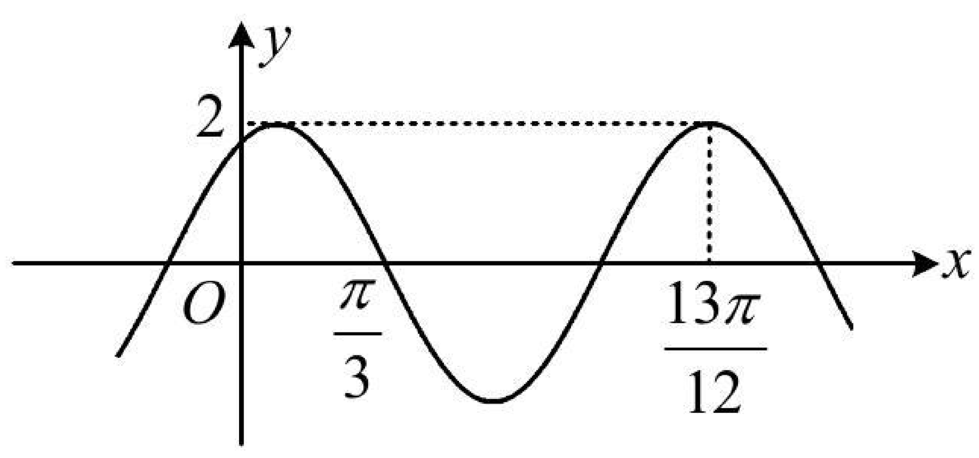
由图可知 $\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{T}{2}$，所以 $T=\pi$，从而 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，故 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，

再代点求 φ，首选最值点，图中虽然没有直接标最值点，但可推断 $\frac{\pi}{6}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$ 的中间是最小值点，

$\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})=\frac{5\pi}{12}$，结合图象可知 $f(\frac{5\pi}{12})=\sin(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi)=\sin(\frac{5\pi}{6}+\varphi)=-1$，

又 $0<\varphi<2\pi$，所以 $\frac{5\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}+\varphi<\frac{17\pi}{6}$，故 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=\frac{3\pi}{2}$，解得：$\varphi=\frac{2\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$.

4.（2021·全国甲卷·★★）已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则 $f(\frac{\pi}{2})=$______.



答案：$-\sqrt{3}$

解析：欲求 $f(\frac{\pi}{2})$，先把解析式中的 ω 和 φ 求出来，图上标了一个零点 $\frac{\pi}{3}$，一个最大值点 $\frac{13\pi}{12}$，由它们可求出 $f(x)$ 的最小正周期，从而求得 ω，

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由图可知，$\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}T$，所以 $T=\pi$，从而 $\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，故 $\omega=\pm2$，

不妨取 $\omega=2$，则 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)$，要求 φ，首选代最值点，图中有 $x=\frac{13\pi}{12}$ 这个最大值点可代，

由图可知，$f(\frac{13\pi}{12})=2\cos(2\times\frac{13\pi}{12}+\varphi)=2\Rightarrow\cos(\frac{13\pi}{6}+\varphi)=1\Rightarrow\frac{13\pi}{6}+\varphi=2k\pi\Rightarrow\varphi=2k\pi-\frac{13\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $f(x)=2\cos(2x+2k\pi-\frac{13\pi}{6})=2\cos(2x-\frac{\pi}{6})$，故 $f(\frac{\pi}{2})=2\cos\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$.

【反思】同一个图象可以有不同的解析式，所以本题 ω 取 -2 也行，如果取 -2，答案会变吗？不会，因为求得的解析式必定能用诱导公式化为与 $\omega=2$ 相同.

5.（2023·全国乙卷·★★★）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})$ 单调递增，直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 和 $x=\frac{2\pi}{3}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的两条对称轴，则 $f(-\frac{5\pi}{12})=$（　　）

（A）$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　（B）$-\frac{1}{2}$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案：D

解析：条件中有两条对称轴，以及它们之间的单调性，据此可画出草图来分析，

如图，$\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{T}{2}\Rightarrow T=\pi$，所以 $|\omega|=\frac{2\pi}{T}=2$，故 $\omega=\pm2$，

不妨取 $\omega=2$，则 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，

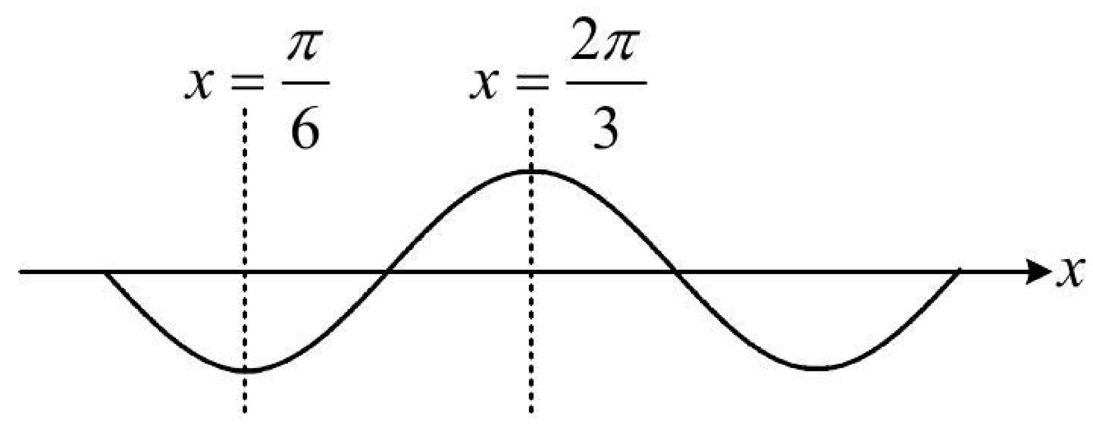
再求 φ，代一个最值点即可，

由图可知，$f(\frac{\pi}{6})=\sin(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi)=\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)=-1$，

所以 $\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，从而 $\varphi=2k\pi-\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

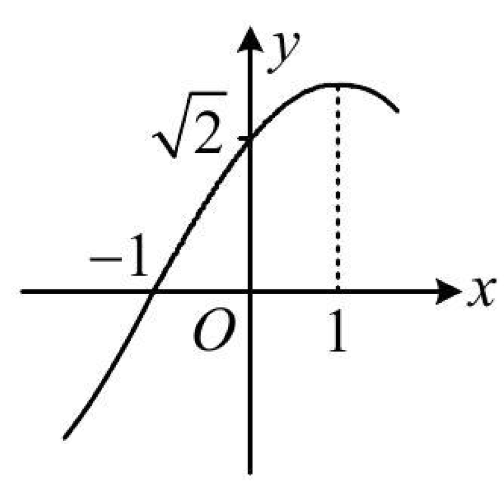
故 $f(x)=\sin(2x+2k\pi-\frac{5\pi}{6})=\sin(2x-\frac{5\pi}{6})$，

所以 $f(-\frac{5\pi}{12})=\sin[2\times(-\frac{5\pi}{12})-\frac{5\pi}{6}]=\sin(-\frac{5\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



6．（2023·海南模拟·★★★）函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则 $f(\frac{7}{3})=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）1



答案：D

解析：图上标注了零点 -1 和最大值点 1，可由此求出周期，进而求得 ω，

由图可知，$1-(-1)=\frac{T}{4}\Rightarrow T=8\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=A\cos(\frac{\pi}{4}x+\varphi)$，

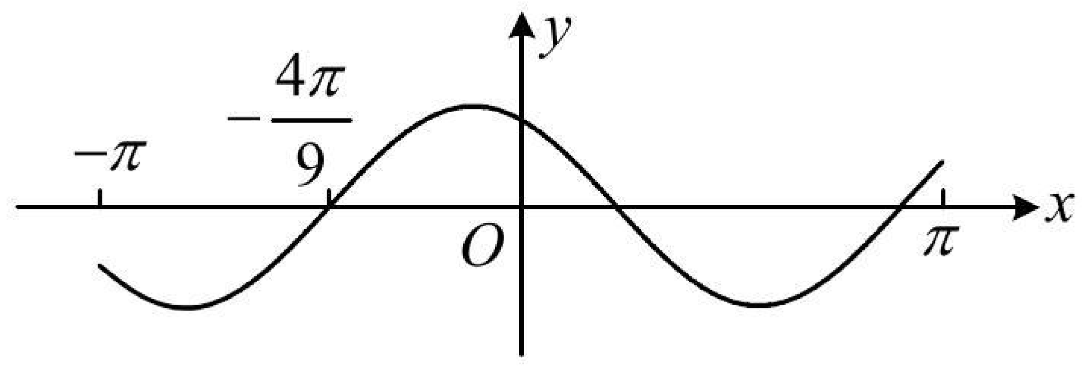
求 A 一般看最值，但图中没有标注最大值和最小值，观察发现图象上标了 $(-1,0)$ 和 $(0,\sqrt{2})$ 这两个点，故尝试把它们代入解析式，建立关于 A 和 φ 的方程组并求解，

$\begin{cases}f(-1)=A\cos(-\frac{\pi}{4}+\varphi)=0 \quad ①\\ f(0)=A\cos\varphi=\sqrt{2} \quad ②\end{cases}$，由①可得 $\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})=0$，结合 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ 可得 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，

代入②得 $A\cos(-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，所以 $A=2$，从而 $f(x)=2\cos(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4})$，故 $f(\frac{7}{3})=2\cos(\frac{\pi}{4}\times\frac{7}{3}-\frac{\pi}{4})=2\cos\frac{\pi}{3}=1$.

7．（2020·新课标Ⅰ卷·★★★）设 $f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致如下图，则 $f(x)$ 的最小正周期为（　　）

（A）$\frac{10\pi}{9}$　（B）$\frac{7\pi}{6}$　（C）$\frac{4\pi}{3}$　（D）$\frac{3\pi}{2}$



答案：C

解析：要求最小正周期，可先求ω，图上只有$(-\frac{4\pi}{9},0)$这一个点可代入解析式，所以把它代进去，

由图可知，$f(-\frac{4\pi}{9})=\cos(-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6})=0$，所以$-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，解得：$\omega=-\frac{3+9k}{4}(k\in\mathbf{Z})$ ①，

图中 x 轴上还标记了$x=-\pi$和$x=\pi$这两个位置，它们虽不能代入解析式，但可用于估算周期的范围，从而得到ω的范围，例如，$-\frac{4\pi}{9}$与π之间的部分超过 1 个周期，$-\pi$与$-\frac{4\pi}{9}$之间的部分不足半个周期，

设$f(x)$的最小正周期为T，由图可知，$\frac{T}{2}>-\frac{4\pi}{9}-(-\pi)$，故$T>\frac{10\pi}{9}$，

另一方面，$\pi-(-\frac{4\pi}{9})>T$，所以$T<\frac{13\pi}{9}$，故$\frac{10\pi}{9}<T<\frac{13\pi}{9}$，所以$\frac{10\pi}{9}<\frac{2\pi}{|\omega|}<\frac{13\pi}{9}$，解得：$\frac{18}{13}<|\omega|<\frac{9}{5}$，

结合式①，可尝试$k=\pm2$，±1，0 等值，可以发现只有$k=-1$才能满足上述范围，

所以$\omega=-\frac{3+9\times(-1)}{4}=\frac{3}{2}$，故$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{4\pi}{3}$.

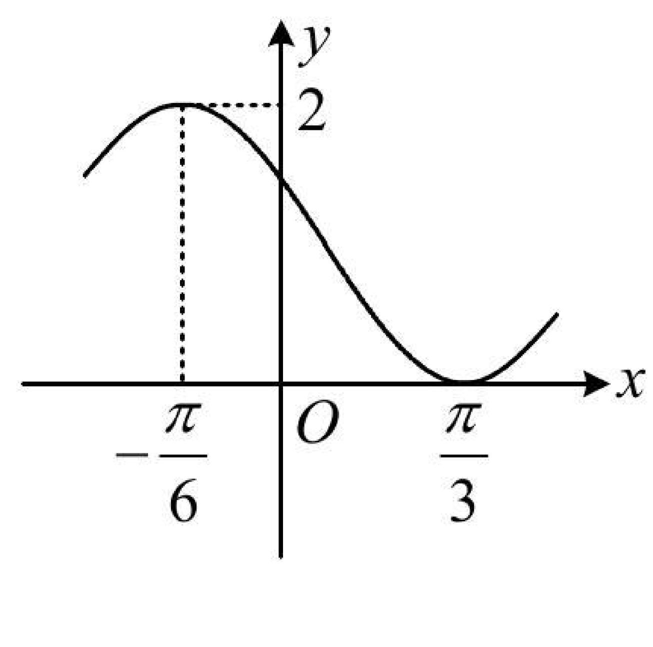
8.（2023・山东潍坊二模・★★★★）（多选）已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$的部分图象如图所示，则（　　）

（A）$f(x)\le f(\frac{11\pi}{6})$

（B）函数$f(x+\frac{\pi}{6})$为偶函数

（C）$f(x)+f(\frac{\pi}{6}-x)=2$

（D）曲线$y=f(x)$在$x=\frac{\pi}{12}$处的切线斜率为-2



答案：ACD

解析：图上标了一个最大值点和一个最小值点，可由此求出周期，进而求得ω，

由图可知，$\frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{6})=\frac{T}{2}\Rightarrow T=\pi\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，

图上能看出最大值和最小值，故可由此求 A，B，

由图可知，$\begin{cases}f(x)_{\max}=A+B=2\\f(x)_{\min}=-A+B=0\end{cases}$，解得：$A=B=1$，所以 $f(x)=\cos(2x+\varphi)+1$，

最后求 φ，代一个最值点即可，不妨代 $x=-\frac{\pi}{6}$，

由 $f(-\frac{\pi}{6})=\cos[2\times(-\frac{\pi}{6})+\varphi]+1=2$ 可得 $\cos(\varphi-\frac{\pi}{3})=1$，结合 $|\varphi|=\pi$ 可得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})+1$，

A 项，$f(\frac{11\pi}{6})=\cos(2\times\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{3})+1=\cos 4\pi+1=2$，所以 $x=\frac{11\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 的最大值点，故 A 项正确；

B 项，$f(x+\frac{\pi}{6})=\cos[2(x+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{3}]+1=\cos(2x+\frac{2\pi}{3})+1$，所以 $f(x+\frac{\pi}{6})$ 不是偶函数，故 B 项错误；

C 项，$f(x)+f(\frac{\pi}{6}-x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})+1+\cos[2(\frac{\pi}{6}-x)+\frac{\pi}{3}]+1=\cos(2x+\frac{\pi}{3})+\cos(\frac{2\pi}{3}-2x)+2$ ①，

因为 $\cos(\frac{2\pi}{3}-2x)=\cos[\pi-(2x+\frac{\pi}{3})]=-\cos(2x+\frac{\pi}{3})$，代入①得 $f(x)+f(\frac{\pi}{6}-x)=2$，故 C 项正确；

D 项，$f'(x)=-2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，所以 $f'(\frac{\pi}{12})=-2\sin(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3})=-2$，故 D 项正确.